1. Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

1) $\int (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)dx$ (*odp.* $\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x + C$)

2) $\int \sqrt{a + bx}dx$ (*odp.* $\frac{2}{3b}\sqrt{(a + bx)^3} + C$)

3) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x}dx$ (*odp.* $\sin x - \cos x + C$)

4) $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$ (*odp.* $-\operatorname{ctg} x - x + C$)

5) $\int x\sqrt{1 + x^2}dx$ (*odp.* $\frac{1}{3}\sqrt{(1 + x^2)^3} + C$)

? 6) $\int \sin^2 x dx$ (*odp.* $\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\sin 2x + C$)

7) $\int \sin(a + bx)dx$ (*odp.* $-\frac{1}{b}\cos(a + bx) + C$)

8) $\int \operatorname{tg} x dx$ (*odp.* $-\ln|\cos x| + C$)

9) $\int \cos\frac{x}{\sqrt{2}}dx$ (*odp.* $\sqrt{2}\sin\frac{x}{\sqrt{2}} + C$)

10) $\int \frac{dx}{2x - 1}$ (*odp.* $\frac{1}{2}\ln|2x - 1| + C$)

11) $\int \frac{x}{x^2 - 1}dx$ (*odp.* $\frac{1}{2}\ln|x^2 - 1| + C$)

12) $\int \frac{1 + x}{\sqrt{1 - x^2}}dx$ (*odp.* $\arcsin x - \sqrt{1 - x^2} + C$)

13) $\int \frac{x}{\sqrt{3 + x^2}}dx$ (*odp.* $\sqrt{3 + x^2} + C$)

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{3 - 3x^2}}$ (*odp.* $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x + C$)

15) $\int x \cdot \operatorname{tg}(x^2 + 1)dx$ (*odp.* $-\frac{1}{2}\ln|\cos(x^2 + 1)| + C$)

16) $\int x \cdot \sin 3x dx$ (*odp.* $\frac{1}{3}(-x\cos 3x + \frac{1}{3}\sin 3x) + C$)

? 17) $\int \frac{x}{e^x}dx$ (*odp.* $-\frac{x + 1}{e^x} + C$)

18) $\int \frac{\ln x}{x^3}dx$ (*odp.* $-\frac{\ln|x|}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C$)

19) $\int e^x \cdot \cos x dx$ (*odp.* $\frac{1}{2}e^x(\sin x + \cos x) + C$)

20) $\int x^3 \cdot e^{\frac{-x}{3}}dx$ (*odp.* $-3e^{-\frac{x}{3}} + C$)

21) $\int \frac{\ln(\operatorname{arctg} x)}{1 + x^2}dx$ (*odp.* $\operatorname{arctg} x(\ln|\operatorname{arctg} x| - 1) + C$)

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

1. Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

1) $\int \frac{x+5}{x^2+10x}dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad \frac{1}{2}\ln|10x+x^2|+C\right)$

2) $\int \frac{x^3}{x+1}dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad \frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x-\ln|x+1|+C\right)$

3) $\int \frac{5x+11}{x^2+3x-10}dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad 3\ln|x-2|+2\ln|x+5|+C\right)$

4) $\int \frac{2x+6}{2x^2+3x+1}dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad 5\ln|x+\frac{1}{2}|-4\ln|x+1|+C\right)$

5) $\int \frac{x^2}{x^2-4x+3}dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad x+2\ln|x^2-4x+3|+\frac{5}{2}\ln\left|\frac{x-3}{x-1}\right|+C\right)$

6) $\int \frac{x^2+4x}{x^2+4x+5}dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad x-5\,\mathrm{arctg}(x+2)+C\right)$

7) $\int \frac{dx}{x^2-6x+10}$ $\quad$ $\left(odp. \quad \mathrm{arctg}(x-3)+C\right)$

8) $\int \frac{dx}{(x-1)^2+4}$ $\quad$ $\left(odp. \quad \frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{2}+C\right)$

9) $\int \frac{dx}{x^2-2x+3}$ $\quad$ $\left(odp. \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x-1}{\sqrt{2}}+C\right)$

10) $\int \frac{3x-1}{x^2+9}dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad \frac{3}{2}\ln|x^2+9|-\frac{1}{3}\,\mathrm{arctg}\,\frac{x}{3}+C\right)$

11) $\int \cos^4 x\,dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad \frac{1}{4}\cos x\sin x\left(\cos^2 x+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{8}x+C\right)$

12) $\int \sin^3 x\cos^3 x\,dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad \frac{1}{4}\sin^4 x-\frac{1}{6}\sin^6 x+C\right)$

13) $\int \frac{\cos x}{\sin^8 x}dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad \frac{-1}{7}\sin^7 x+C\right)$

14) $\int \frac{\cos^3 x\,dx}{\sin^2 x}$ $\quad$ $\left(odp. \quad -\frac{1+\sin^2 x}{\sin x}+C\right)$

15) $\int \sin^3 x\,dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad \frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C\right)$

16) $\int \frac{\cos x}{\sin^8 x}dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad \frac{-1}{7}\sin^7 x+C\right)$

17) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\sin^2 x}}dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad 3\sqrt[3]{\sin x}+C\right)$

18) $\int \sin^4 x\cos^5 x\,dx$ $\quad$ $\left(odp. \quad \frac{1}{5}\sin^5 x-\frac{2}{7}\sin^7 x+\frac{1}{9}\sin^9 x+C\right)$

19) $\int \frac{(8x+3)dx}{\sqrt{4x^2+3x+1}}$ $\quad$ $\left(odp. \quad 2\sqrt{4x^2+3x+1}+C\right)$

20) $\int \frac{(10x-15)dx}{\sqrt{36x^2-108x+77}}$ $\quad$ $\left(odp. \quad \frac{5}{18}\sqrt{36x^2-108x+77}+C\right)$

21) $\int \frac{(x+3)dx}{\sqrt{x^2+2x}}$ $\quad$ $\left(odp. \quad \sqrt{x^2+2x}+2\ln|x+1+\sqrt{x^2+2x}|+C\right).$

1. Obliczyć następujące całki nieoznaczone:

1) $\int \frac{dx}{x^4-x^2}$ $\quad$ (*odp.* $\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C$)

2) $\int \frac{(6x+1)dx}{\sqrt{3x^2+x+1}}$ $\quad$ (*odp.* $2\sqrt{3x^2+x+1}+C$)

3) $\int \frac{(x-5)dx}{\sqrt{-x^2+4x+5}}$ $\quad$ (*odp.* $-\sqrt{-x^2+4x+5}-3\arcsin\frac{1}{3}(x-2)+C$)

4) $\int \frac{(x+1)dx}{\sqrt{-x^2+2x+8}}$ $\quad$ (*odp.* $-\sqrt{-x^2+2x+8}+2\arcsin\frac{1}{3}(x-1)+C$)

5) $\int \frac{(3x+2)dx}{\sqrt{x^2-5x+19}}$(*odp.*$3\sqrt{x^2-5x+19}+\frac{19}{2}\ln|x-\frac{5}{2}+\sqrt{x^2-5x+19}|+C$)

6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+x+1}}$(*odp.* $-\arcsin\frac{2-x}{\sqrt{5}x}+C$)

7) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-2x-1}}$(*odp.* $-\arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}x}+C$)

8) $\int \frac{\arctan x}{(1+x)^2}dx$($\frac{-1}{1+x}\arctan x+\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{4}\ln|1+x^2|+\frac{1}{2}\arctan x+C$)

9) $\int \frac{dx}{(x^2+x+1)^2}$ $\quad$ $\left(\text{\textit{odp.}}\frac{2x+1}{3(x^2+x+1)}+\frac{4}{\sqrt{3}}\arctan\frac{2x+1}{\sqrt{3}}+C\right)$

10) $\int \frac{dx}{(x^2+4x+8)^3}$ $\left(\frac{x+2}{16(x^2+4x+8)}+\frac{3}{128}\frac{x+2}{x^2+4x+8}+\frac{3}{256}\arctan\frac{x+2}{2}\right)$

11) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$ $\quad$ (*odp.* $2\arctan\sqrt{1+x}+C$)

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}$($2\sqrt{x+1}-3\sqrt[3]{x+1}+6\sqrt[6]{x+1}-6\ln|1+\sqrt[6]{x+1}|+C$)

13) $\int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\cdot\frac{dx}{1-x}$ $\quad$ (*odp.* $-2\arctan\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}+C$)

14) $\int \frac{dx}{\sqrt{7-6x-x^2}}$ $\quad$ (*odp.* $\arcsin\frac{1}{4}(x+3)+C$)

15) $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2+3x-1}}$ $\quad$ (*odp.* $\frac{1}{2}\ln|3+4\sqrt{4x^2+3x-1}-8x|+C$)

16) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3x+2}}$ $\quad$ (*odp.* $\ln|x+\frac{3}{2}+\sqrt{x^2+3x+2}|+C$)

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+x+1}}$ $\quad$ (*odp.* $\ln|\sqrt{x^2+x+1}+x+\frac{1}{2}|+C$)

18) $\int \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$ $\quad$ (*odp.* $x+1+4\sqrt{x+1}+4\ln|\sqrt{x+1}-1|+C$).

1. Zbadać ciągłość funkcji w punkcie $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x} & \text{dla} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0. \end{cases}$$

2. Zbadać ciągłość funkcji w punkcie $x_0 = 0$:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & \text{dla} \quad x < 0 \\ 0 & \text{dla} \quad x = 0 \\ \dfrac{2^x - 1}{x} & \text{dla} \quad x > 0. \end{cases}$$

3. Na podstawie definicji obliczyć pochodną funkcji:

$$a)\ f(x) = \sqrt{x}, \quad b)\ f(x) = \sin 2x, \quad c)\ f(x) = x^3 + 4x - 5.$$

4. Obliczyć pochodną funkcji:

1) $y = 3x^2 + 2x - 5$

2) $y = \dfrac{x^2 - 2}{3x + 4}$

3) $y = \dfrac{2x^3 - 5x + 7}{x}$

4) $y = (1 - x^2)^{20}$

5) $y = \operatorname{tg}^3 \dfrac{x+1}{2}$

6) $y = (3x^5 + 2x^3 - 5x + 9)(x^3 - 4x)$

7) $y = \sin(3x + 7) \cdot 5^{3x - \sin x}$

8) $y = \ln^2(x^5 - 6x)$

9) $y = \sqrt{\ln \sqrt{x}}$

10) $y = \cos^2 4x$

11) $y = \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1 - x^2}}$

12) $y = e^{-6x} \cdot \ln x$

13) $y = \sin x \cdot e^{\cos x}$

14) $y = (\arccos x)^2$

15) $y = \sqrt[3]{1 + 2 \operatorname{tg} x}$

16) $y = \ln(1 + \cos x)$

17) $y = (1 + \sqrt[5]{x})(1 + \sqrt{(3x)^4})$

18) $y = 2^{\frac{x}{\ln x}}$

19) $y = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$

20) $y = \ln \sin x$

21) $y = \ln \operatorname{tg} \sqrt{1 + x^2}$

22) $y = \ln \dfrac{1+x}{1-x}$

23) $y = \sin^3(\arcsin x)$

24) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^4 - x^8}}$

25) $y = e^{-x^2} \cdot \dfrac{2}{x^5}$

26) $y = (\sqrt[3]{x} + 2x)(1 + \sqrt[3]{x^2})$

27) $y = \dfrac{\sin \frac{1}{x}}{1 + \cos^2 x}$

28) $y = e^{\operatorname{tg} \sqrt[4]{x}}$

29) $y = \log_{3x} 7$

30) $y = \log_x \operatorname{tg} x$

31) $y = \left(5x^2 + \dfrac{3}{x^2} - 2\right)^{\sqrt{x}}$

32) $y = (\cos 5x)^{\ln^2 x}$

33) $y = (\operatorname{tg}^3 x^4)^{\sin x^7}$.

1. Obliczyć granice ciągów:

$a)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5n^6 - 3n^4 + 2}{5 - 10n^6}$ $= -\frac{1}{2}$

$b)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{5 \cdot 3^n + 1}{3^n + 2}$ $= 1$

$c)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1 + 3 + \ldots + (2n-1)}{2 + 4 + \ldots + 2n}$

$d)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{3^n - 2^n}{4^n - 3^n}$

$e)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + 5n} - n)$

$f)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} (\sqrt{n^2 + 4n + 1} - \sqrt{n^2 + 2n})$

$g)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 4^n + 5^n}$

$h)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sin^2 n + 5n}{2n - 1}$

$i)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\log_3 (n+2)}{\log_4 (n+2)}$

$j)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 + 1}}{n}$

$k)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n+3}\right)^{2n+1}$

$l)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{6n}$

$ł)$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{n}.$

2. Obliczyć granice funkcji:

$a)$ $\displaystyle\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x - 3}$

$b)$ $\displaystyle\lim_{x\to -4} \frac{x^2 + 9x + 20}{5x + 20}$

$c)$ $\displaystyle\lim_{x\to 4} \frac{x^2 + 9x + 20}{5x + 20}$

$d)$ $\displaystyle\lim_{x\to 36} \frac{\sqrt{x} - 6}{x - 36}$

$e)$ $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{1 - \sin x}{\cos^2 x}$

$f)$ $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$

$g)$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} 2^x$

$h)$ $\displaystyle\lim_{x\to -\infty} 2^x$

$i)$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \log_3 x$

$j)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2 + x + 1} - \sqrt{x^2 - x - 1}\right) \; (= 1)$

$k)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x} \; (= e^{10})$

$l)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\ln(x+1)} (= 4)$

$ł)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$

$m)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \log_3 x$ → nie istn

$n)$ $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

$o)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 4x}{5x}$ $= \frac{4}{5}$

$p)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin 4x}{3x + \sin 2x}$

$r)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2x}$

$s)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x+2}\right)^{2x-1} \quad (e^2)$

$t)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{4x+1}{4x+2}\right)^{8x} \quad (= e^{-2})$

$u)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x}{x+1}\right)^{x} \quad (= e^{-1})$

$w)$ $\displaystyle\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x + \sqrt[3]{x^3 + 1}} \left(= \frac{1}{2}\right)$

$y)$ $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{3 - \sqrt{2x + 9}} (= -9)$

$z)$ $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{\sin(x+1)}{1 - x^2} \left(= \frac{1}{2}\right).$

1. Znaleźć postać kartezjańską następujących liczb zespolonych:

a) $\dfrac{1-5i}{2+3i}$ (odp. $-1-i$)

b) $\dfrac{(1-i)^2-i}{(1+i)^2+i}$ (odp. -1)

c) $\dfrac{(\sqrt{3}+i)(-1+i\sqrt{3})}{(1+i)^2}$ (odp. $1+i\sqrt{3}$)

d) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^2(1-i)^3}{\sqrt{3}+i}i^3$ (odp. $-4-4i$)

e) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})(-1-i\sqrt{3})}{1-i}$ (odp. $1+\sqrt{3}+(1-\sqrt{3})i$).

2. Znaleźć liczby rzeczywiste x i y spełniające równania:

a) $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$ $\left(\text{odp. } \left(-\dfrac{4}{11}, \dfrac{5}{11}\right)\right)$

b) $(2-i)x+(1+2i)y=10i$ (odp. $(-2,4)$).

3. Podane liczby zespolone zapisać w postaci trygonometrycznej:

a) -1 (odp. $\cos\pi+i\sin\pi$)

b) $-1+i\sqrt{3}$ $\left(\text{odp } 2\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi\right)\right)$

c) $1+i$ $\left(\text{odp. } \sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right)$

d) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ $\left(\text{odp. } \cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$.

4. Obliczyć (wynik podać w postaci kartezjańskiej):

a) $\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{12}$ (odp. 1)

b) $\dfrac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ (odp. 2)

c) $(\sqrt{3}-i)^{32}$ (odp. $-2^{31}(1-i\sqrt{3})$)

d) $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)^7$ $\left(\text{odp. } \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

e) $(1+i\sqrt{3})^{150}$ (odp. 2^{150})

f) $\dfrac{(1+i\sqrt{3})^8}{(1-i)^6}$ (odp. $2^4(\sqrt{3}+i)$)

g) $\left(\cos\dfrac{\pi}{5}+i\sin\dfrac{\pi}{5}\right)^{25}$ (odp. -1)

h) $\dfrac{(2i-2)^5}{(i-1)^3}+2i-5$ (odp. $-5-62i$).

5. Na płaszczyźnie zespolonej narysować zbiory liczb z spełniających podane warunki:

a) $3i(z+\overline{z})-(z-\overline{z})4i=0$

b) $|z-i|\geq 3$

c) $|z|=Re(z)+1$

d) $2\leq|iz-5|\leq 3$

e) $\left|\dfrac{z+i}{z^2-i}\right|\geq 1$

f) $arg(iz)=\dfrac{\pi}{3}$.

1. Obliczyć objętość czworościanu rozpiętego na wektorach:

$$\vec{a} = [1, 1, 1], \quad \vec{b} = [1, -1, 0], \quad \vec{c} = [-1, 3, -2].$$

2. Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach:

$$\vec{a} = [0, 0, 1], \quad \vec{b} = [-1, 2, 3], \quad \vec{c} = [2, 5, -1].$$

3. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(-1, 5, 7)$ i równoległej do płaszczyzny $\pi : 2x - y + 5z - 1 = 0$.

4. Znaleźć równanie płaszczyzny przechodzącej przez punkt $P(2, 3, -6)$ i prostopadłej do płaszczyzn:

$$\pi_1 : x + y + z - 5 = 0$$

i

$$\pi_2 : x - y + 2 = 0.$$

5. Znaleźć odległość punktu $P(-1, 2, 5)$ od płaszczyzny $\pi : x + 2y - 5z + 1 = 0$.

6. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(4, 3, 0)$ i równoległej do wektora $\vec{a} = [-1, 1, 1]$.

7. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkty $P(-1, 1, 0)$ i $Q(0, 3, -2)$.

8. Przez punkt $P(2, -5, 3)$ poprowadzić prostą równoległą do prostej

$$l : \frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{-5} = \frac{z-5}{1}.$$

9. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(1, -5, 3)$ i prostopadłej do płaszczyzny $\pi : x - 3z + 7 = 0$.

10. Napisać równanie prostej przechodzącej przez punkt $P(0, 0, -2)$ i prostopadłej do wektorów $\vec{a} = [0, 1, -5]$ i $\vec{b} = [-2, 3, 0]$.

11. Znaleźć odległość punktu $P(7, 9, 7)$ od prostej

$$l : \frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}.$$

12. Znaleźć punkt symetryczny do punktu $P(0, 1, 3)$ względem:
a) punktu $S(1, 0, -1)$;
b) prostej $l : \frac{x+1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z-5}{3}$;
c) płaszczyzny $\pi : x + y + z = 0$.

13. Znaleźć rzut punktu $P(0, 1, 0)$ na płaszczyznę $\pi : x + 3y - 6 = 0$.

14. Znaleźć rzut prostej $l : x = -2y = 3z$ na płaszczyznę $\pi : x + y + z - 5 = 0$.

1. Obliczyć iloczyny skalarne podanych par wektorów:

$$a)\quad \vec{a} = [1,-2,5],\quad \vec{b} = [3,-1,0],$$ 5

$$b)\quad \vec{a} = [2,5,1],\quad \vec{b} = [3,-2,4].$$ 0

2. Znaleźć kąt między wektorami $\vec{a}$ i $\vec{b}$, jeżeli:

$$a)\quad \vec{a} = [-3,0,4],\quad \vec{b} = [0,1,-2],$$

$$b)\quad \vec{a} = [2,5,4],\quad \vec{b} = [6,0,-3].$$ $\cos(\vec{a},\vec{b}) = 0$

3. Obliczyć długość iloczynu wektorowego wektorów:

$$\vec{a} = [1,2,0],\quad \vec{b} = [0,-5,3].$$ $[6,-3,-5]$

4. Dane są wektory $\vec{a} = [2,-3,1]$, $\vec{b} = [1,6,-1]$, $\vec{c} = [1,5,3]$. Znaleźć:

$$a)\quad [(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}],\qquad b)\quad [(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}].$$

5. Obliczyć pole równoległoboku $ABCD$, mając dane trzy jego wierzchołki:

$$A(2,3,-6),\quad B(6,4,4),\quad C(3,7,4).$$

6. Obliczyć pole trójkąta o wierzchołkach:

$$A(-1,0,-1),\quad B(0,2,-3),\quad C(4,4,1).$$

7. Sprawdzić, czy wektory:

$$\vec{a} = [1,1,4],\quad \vec{b} = [1,-2,0],\quad \vec{c} = [3,-3,4]$$

są współpłaszczyznowe. TAK

8. Sprawdzić, czy punkty:

$$P(0,0,0),\quad Q(-1,2,3),\quad R(2,3,-4),\quad S = (2,-1,5)$$

NIE

należą do jednej płaszczyzny.

9. Obliczyć objętość równoległościanu rozpiętego na wektorach:

$$\vec{a} = [0,0,1],\quad \vec{b} = [-1,2,3],\quad \vec{c} = [2,5,-1].$$

1. Rozwiązać układy równań:

$$a)\ \begin{cases} x + 4y + 5z = 7 \\ 2x - y - z = 1 \\ 5x + y + 2z = 8 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} 3x_1 + 3x_2 + 6x_3 - x_4 = 2 \\ 7x_1 + 5x_2 + 14x_3 - 3x_4 = 6 \\ 5x_1 + 7x_2 + 10x_3 - x_4 = 2 \end{cases}$$

$$c)\ \begin{cases} x + y + 2z + 3t = 1 \\ 3x - y - z - 2t = -4 \\ 2x + 3y - z - t = -6 \\ x + 2y + 3z - t = -4 \end{cases} \quad d)\ \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 2 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 6 \\ 5x_1 + x_2 - 5x_3 + 12x_4 = 10 \end{cases}$$

2. Sprawdzić czy podane układy równań są układami Cramera. Jeśli tak, rozwiązać je metodą eliminacji Gaussa.

$$a)\ \begin{cases} x + 2y + 3z = 5 \\ 2x - y - z = 1 \\ x + 3y + 4z = 6 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3z - t = 1 \\ 7x - y + z + t = 4 \\ 2y - z - 2t = -7 \end{cases}$$

3. Rozwiązać, metodą macierzową, układy równań:

$$a)\ \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - 5z = 4 \\ 3x - y + 2z = 1 \end{cases} \quad b)\ \begin{cases} x + y + 2z = -1 \\ 2x - y + 2z = -4 \\ 4x + y + 4z = -2 \end{cases}$$

4. Określić liczbę rozwiązań podanego układu równań w zależności od parametru p:

$$\begin{cases} px + y + 2z = 1 \\ x + py + 2z = 1 \\ x + y + 2pz = 1 \end{cases}$$

5. Rozwiązać podany układ równań w zależności od parametru p:

$$\begin{cases} px + y + z = 0 \\ 5x + y - 2z = 2 \\ -2x - 2y + z = -3 \end{cases}$$