METODY NUMERYCZNE

Funkcja y=f(x) dana jest w postaci tablicy (dotyczy zadania 1-4):

x	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	0	2	5	7	7	4	0	-2	-5	-6	-4

1. Przeprowadzić interpolacje funkcji y=f(x) dla dowolnie wybranych trzech kolejnych węzłów:

x	0	1	2
y	4	0	-2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$a_0=4$
$a_0+a_1+a_2=0$
$a_0+2a_1+4a_2=-2$

$a_1+a_2=-4$
$2a_1+4a_2=-6$

$a_1+a_2=-4$
$-a_1-2a_2=3$

$-a_2=-1$

$a_0=4$
$a_1=-5$
$a_2=1$

Wynik: $y=x^2-5x+4$

2. Dokonać aproksymacji funkcji y=f(x) dla $-2 \le x \le 5$ wielomianem liniowym:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5
y	7	7	4	0	-2	-5	-6	-4

$$\Psi(x) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 5 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 60 \end{bmatrix}$$

$$F(x) = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 \\ -15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -6 \\ -24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -84 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 8 & 12 \\ 12 & 60 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -84 \end{bmatrix}$$

$8a_0+12a_1= 1$
$12a_0+60a_1=-84$

$-6a_0-9a_1=-\frac{3}{4}$
$6a_0+30a_1=-42$

$21a_1=-42\frac{3}{4}$ /:21

$a_1=\frac{171}{84}=-2.0357142$
$a_0=3.1785711$

Wynik: $y=3.1785711-2.0357142x$

3. Oblicz metodą numeryczną f'(1) i f''(-1)

przy h=1

f'(1):

$$f_k' = \frac{f_{k+1} - f_{k-1}}{2h} = \frac{-2-4}{2} = -3$$

f''(-1):

$$f_k'' = \frac{f_{k+1} - 2f_k + f_{k-1}}{h^2} = \frac{4-14+7}{1} = -3$$

4. Wyznaczyć $\int_{-4}^{2} f(x)dx$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2
y	2	5	7	7	4	0	-2

a) metodą trapezów

$$J = \frac{h}{2}(y_0 + y_m + 2\sum_{i=1}^{m-1} y_i) = \frac{1}{2}(2-2+2(5+7+7+4)) = 23$$

b) metodą Simpsona

$$J = \frac{h}{3}(y_0 + y_m + 2\sum_{i=1}^{m-2} y_{2i} + 4\sum_{i=1}^{m-1} y_{2i-1}) = \frac{1}{3}(2-2+2(7+4)+4(5+7+0)) = 23\frac{1}{3}$$

5. Przybliżyć pierwiastek równania $e^{-x}=4-x^2$ zawarty w przedziale [1.9; 2]

a) metodą połowienia (3 kroki obliczeń)

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{1.9+2}{2} = \frac{3.9}{2} = 1.95$$

$f(1.95) = e^{-x} - 4 + x^2$=0.14227-4+3.8025=-0.05523 <1,95; 2>

$$x = \frac{1{,}95+2}{2} = \frac{3.95}{2} = 1.975$$

$f(1.975) = e^{-x} - 4 + x^2 = 0.13876 - 4 + 3.90062 = 0.03938$ <1,95; 1,975>

x=$\frac{1,95+1.975}{2}=\frac{3.925}{2}=1.9625$

$f(1.9625)=e^{-x}-4+x^2=0.14051-4+3.85141=-0.00808$ <1,9625; 1,975>

b) metodą siecznych (2 kroki obliczeń)

$$x_1=b-\frac{f(b)}{f(b)-f(a)}(b-a)$$

$$x_1=2-\frac{f(2)}{f(2)-f(1.9)}(2-1.9)=2-\frac{0.13534}{0.13534+0.24043}\cdot 0.1=1.96398$$

$$x_{n+1}=b-\frac{f(b)}{f(b)-f(x_n)}(b-x_n)$$

$$x_2=2-\frac{0.13534}{0.13534+0.0024}(2-1.96398)=1.98704$$

6. Rozwiąż równanie różniczkowe y'=x+2y w przedziale [0;0.4] przyjmując warunek początkowy y(0)=0.5 oraz długość kroku h=0.2 stosując metodę Rungego-Kutty IV Rzędu.

Krok 1:

$x_1=x_0+h=0+0.2=0.2$

$k_1=0+2*0.5=1$

$k_2=0+0.1+2(0.5+1*0.1)=0.1+1.2=1.3$

$k_3=0+0.1+2(0.5+1.3*0.1)=1.36$

$k_4=0+0.1+2(0.5+1.36*0.2)=1.744$

$y_1=0.5+\frac{1}{6}(1+2*1.3+2*1.36+1.744)*0.2=0.7688$

Krok 2:

$x_2=x_1+h=0.2+0.2=4$

$k_1=0.2+2*0.77=1.74$

$k_2=0.2+0.1+2(0.77+1.74*0.1)=2.19$

$k_3=0.2+0.1+2(0.77+2.19*0.1)=2.28$

$k_4=0.2+0.2+2(0.77+2.28*0.2)=2.85$

$y_2=0.77+\frac{1}{6}(1.74+2*2.19+2*2.28+2.85)*0.2=1.22$